**MAI 2 1. a 2. cvičení - výpočet primitivní funkce (neurčitý integrál) 1.**
(Najděte primitivní funkce na maximálních intervalech)

1. Jednoduché příklady na výpočet primitivní funkce :

a) ( užití tabulky primitivních funkcí a výpočet integrálu násobku funkce a součtu funkcí)

$\int (3e^x + \frac{1}{x})\,dx$ ; $\int (5\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x})\,dx$ ; $\int (\sqrt[3]{x} + x^5)\,dx$ ; $\int \frac{x^3-1}{2x}\,dx$ ; $\int \frac{(1-v)^2}{v\sqrt{v}}\,dv$ ;

$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$ ; $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$ ; $\int tg^2 u\,du$ .

b) Je-li $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ na intervalu $I$, pak, na odpovídajícím intervalu je

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad, a > 0 :$$

$\int e^{-x}\,dx$ ; $\int \cos(3x+2)\,dx$ ; $\int 4^x\,dx$ ;

$\int (3x-2)^6\,dx$ ; $\int \sqrt{3x-2}\,dx$ ; $\int \sqrt[3]{1-2x}\,dx$ ; $\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}\,dx$ ; $\int \frac{1}{5-x}\,dx$ ; $\int \frac{1}{(3x+1)^5}\,dx$ ;

$\int \frac{1}{4+x}\,dx$; $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$ ; $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ ; $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$ ; $\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$ ;

$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x}}\,dx$ ; $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$ ; $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$;

$\int \sin^2 x\,dx$ ; $\int \cos^2 x\,dx$ .

2. 1. věta o substituci:

Nechť : (i) funkce $f$ má na intervalu $(a,b)$ primitivní funkci $F$ ( nebo- li $\int f(t)\,dt = F(t) + C$ na $(a,b)$ )

a (ii) funkce $g$ je definovaná na intervalu $(\alpha,\beta)$, $g(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ a $g$ má vlastní derivaci v každém bodě z $(a,b)$.

Pak $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \quad \text{na} \quad (\alpha,\beta).$$

$\int 2xe^{x^2}\,dx$ ; $\int 2xe^{-x^2}\,dx$ ; $\int x\sin(x^2)\,dx$ ; $\int x^2\cos(x^3)\,dx$ ; $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ ; $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$ ;

$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$ ; $\int e^x \sin(e^x)\,dx$ ; (*) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$

$\int \frac{1}{x^3}\exp(\frac{1}{x^2})\,dx$ ; $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})\,dx$ ; $\int \cos x \cdot \exp(\sin x)\,dx$ ;

$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}\,dx$ ; $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ ; $\int \frac{1}{x\cdot(1+\ln^2 x)}\,dx$ $\int \frac{\ln x}{x\cdot(1+\ln^4 x)}\,dx$ ( stejně i $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ );

$\int \cos^3 x \cdot \sin x\,dx$ ; $\int \sin^3 x\,dx$ ; (*) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ ; (*) $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}\,dx$ ;

Spec. $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$ na intervalu, kde je $g(x) \neq 0$:

$\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx$ ; $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$ ; $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx$ ; $\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}\,dx$ ; $\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx$ ;

$\int \frac{\sin x}{5+\cos x}\,dx$ ; $\int tg x\,dx$ ; $\int \frac{1}{1+tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ ; $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$.

3. Integrace „per partes“ :

Jsou-li funkce $f$ a $g$ spojité na intervalu $(a,b)$, a je-li $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a,b)$ a $G$ primitivní funkce ke $g$ na $(a,b)$, potom na $(a,b)$ platí:

$$\int f(x)\cdot G(x)\,dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)\,dx$$

nebo jiná (často užívaná) „verze“ věty o integraci per partes:

Jsou-li funkce $u'$ a $v'$ spojité na intervalu $(a,b)$, pak na $(a,b)$ platí:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

a) $\int x\sin x\,dx$ ; $\int x^2\cos x\,dx$ ; $\int x^3\ln x\,dx$ ; $\int x\ln^2 x\,dx$ ; $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

b) $\int \ln x\,dx$ ; $\int \ln^2 x\,dx$ ; $\int \frac{1}{x}\ln x\,dx$ ;

c) $\int \sin^2 x\,dx$ ; $\int \cos^2 x\,dx$ ; $\int e^x(\sin x+\cos x)\,dx$; $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$;

d) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ ; $\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ , $n\in N, n\geq 3$ ;

4. „Slepování“ primitivních funkcí:

a) najděte $\int |x|\,dx$ ; $\int\sqrt{x^6}\,dx$ ; $\int |\sin x|\,dx$ v $R$;

b) najděte v $R$ primitivní funkci k funkci $f$, je-li

i) $f(x)=0$ pro $x\leq 0$ a $f(x)=2x$ pro $x>0$ ; ii) $f(x)=x$ pro $x\leq 0$ a $f(x)=\sin x$ pro $x>0$ ;

iii) $f(x)=-x$ pro $x\leq 0$ a $f(x)=x^2$ pro $x>0$ ;

5. Ukažte, daná funkce nemá v $R$ funkci primitivní:

a) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ ; b) $f(x)=x$ pro $x\leq 0$ a $f(x)=2x+1$ pro $x>0$.

6. Ukažte, že funkce $f: R\to R$, definovaná jako $f(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x\neq 0, f(0)=0$, má v $R$ primitivní funkci, i když není spojitá v bodě $x=0$.